

Ricerca operativa

Corso di Laurea in Informatica

Appunti di Ricerca Operativa

29 aprile 2008

Docente
Dorotea De Luca Cardillo

Appunti di
Fabio Duchi

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Sostituzione di un vettore in una base	1
1.2	Insiemi convessi	2
1.3	Punti estremi	2
1.4	Iperpiani e semispazi	2
1.5	Raggi e direzioni	3
1.6	Direzioni di un insieme convesso	3
1.7	Coni convessi	4
1.8	Funzioni convesse e concave	4
1.9	Insieme poliedrale e coni poliedrali	4
1.9.1	Punti estremi	5
1.9.2	Faccia, Spigoli, e punti estremi adiacenti	6
1.9.3	Direzioni di recessione e direzioni estreme	6
1.10	Insieme di Poliedri	7
1.10.1	Politopi	7
1.10.2	Poliedri illimitati	7
2	Il metodo del simplesso	11
2.1	Punti estremi ed ottimalità	11
2.2	Soluzione di Base Ammissibile (SBA)	12
2.2.1	Corrispondenza tra soluzione di base ammissibili e pun- ti estremi	12
2.2.2	Esistenza di una soluzione di base ammissibile	13
2.3	Concetti di base del metodo del Simpleso	14
2.3.1	Algebra del Simpleso	16
2.3.2	Interpretazione dei costi ridotti $z_k - c_k$	19
2.4	Condizioni di terminazione: ottimalità e illimitatezza	19
2.4.1	Terminazione con ottimalità	20
2.4.2	Soluzione ottima unica e soluzioni multiple	20
2.4.3	Illimitatezza	20

3	Soluzione iniziale e convergenza	22
3.1	Variabili artificiali	22
3.1.1	Metodi delle 2 fasi	23
3.1.2	Metodo delle Big-M	26
3.2	Degenerazione, cycling e stallo	28
3.2.1	Regola di Bland	28
4	Implementazione del metodo del simplesso e ottimizzazione	30
4.1	Metodo del simplesso modificato	30
4.1.1	Analisi del metodo	31
4.2	Metodo con l'inversa nella forma prodotto	32
4.3	Lemma di Farkas	32
4.4	Condizioni di ottimalità di Karush-Kuhn-Tucker	33
5	Dualità	36

Indice analitico

- combinazione baricentrica, 2
- condizioni di ottimalità KKT, 34
- cono di recessione, 6
- convesso
 - insieme, 2
- costi ridotti, 16
- cycling, 28
- direzioni
 - insieme delle direzioni di recessione, 6
- forma canonica, 15
- funzione concava, 4
- funzione convessa, 4
- insieme convesso
 - direzione, 3
- insieme convesso
 - direzione estrema, 4
- insieme poliedrale, 4
 - cono, 5
 - politopo, 5
- insiemi convessi
 - coni convessi, 4
- iperpiani di definizione, 5
- iperpiano, 2
- lemma di Farkas, 32
- metodo del simplesso
 - delle due fasi, 23
- metodo delle big-M, 26
- moltiplicatori lagrangiani, 35
- poliedro
 - faccia propria, 6
 - spigolo, 6
- problema
 - ausiliario, 23
 - completare, 35
 - duale, 35
 - primale, 35
- punto estremo, 6
 - adiacente, 6
- raggio, 3
 - direzione, 3
 - vertice, 3
- regola di Bland, 28
- semispazio
 - positivo, 2
- soluzione di base
 - ammissibile, 12
 - degenere, 12
- stallo, 29
- variabili
 - artificiali, 23
- variabili originarie, 24
- vertice, 6
 - degenere, 5
 - estremo, 2

1

Introduzione

In questo capitolo sono raccolti concetti fondamentali di geometria utili nel seguito degli appunti.

1.1 Sostituzione di un vettore in una base

Supponiamo che $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ formino una base per \mathbb{E}^n . Sia $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ con cui si vuol sostituire il vettore \vec{a}_j . Dall'ipotesi che i \vec{a}_i formino una base deriva che possiamo esprimere \vec{a} come:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i. \quad (1.1)$$

Se $\lambda_j \neq 0$ allora i vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n$ sono linearmente indipendenti. Per dimostrarlo si consideri μ, μ_i tali che:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i \vec{a}_i + \mu \vec{a} = 0, \quad (1.2)$$

Dall'espressione (1.1) possiamo sostituire \vec{a} :

$$\sum_{i \neq j} \mu_i \vec{a}_i + \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = 0,$$

da cui:

$$\sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \lambda_i) \vec{a}_i + \mu \lambda_j \vec{a}_j = 0.$$

Dall'ipotesi che $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ siano linearmente indipendenti, i rispettivi coefficienti devono essere tutti nulli; in particolare deve essere nullo il coefficiente $\mu \lambda_j$, per ipotesi $\lambda_j \neq 0$, ma allora $\mu = 0$, quindi nell'equazione (1.2) (sempre per l'indipendenza lineare dei \vec{a}_i) segue $\mu \mu_i = 0$, ma allora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n$ sono linearmente indipendenti.

1.2 Insiemi convessi

Un insieme $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{E}^n$ è detto *insieme convesso* se:

insieme convesso

$$\begin{aligned} \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 : \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{X}, \\ \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{x}_2 \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Ogni punto della forma $\lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{x}_2$, con $\lambda \in [0, 1]$, è detta *combinazione baricentrica*, di \vec{x}_1 e \vec{x}_2 . Si parla di *combinazione baricentrica stretta* se $\lambda \in (0, 1)$.

combinazione baricentrica

1.3 Punti estremi

Se in un insieme \mathbb{X} un punto non può essere rappresentato come la combinazione convessa di due distinti punti in \mathbb{X} allora si dice *vertice estremo* dell'insieme \mathbb{X} .

vertice estremo

Se \mathbb{X} è un convesso allora i *vertici estremi*, \vec{x} , sono descritti dall'equazione $\vec{x} = \vec{x}_1 \lambda + (1 - \lambda) \vec{x}_2$, con $\lambda \in (0, 1)$, dove $\vec{x} = \vec{x}_1 = \vec{x}_2$, che comunque soddisfano la definizione di insieme convesso.

1.4 Iperpiani e semispazi

Un *iperpiano* in \mathbb{E}^n è l'insieme dei punti che soddisfa l'equazione:

iperpiano

$$\{\vec{x} : \vec{a}^T \vec{x} = k\}. \quad (1.3)$$

Dove $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ e $k \in \mathbb{R}$. L'iperpiano può essere visto come una generalizzazione del concetto di retta e di piano, rispettivamente di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , in \mathbb{R}^n .

Considerando gli stessi valori di \vec{a} e k , si può osservare che posto \vec{x}_0 come un qualsiasi vettore soddisfacente $\vec{a}^T \vec{x}_0 = k$, allora ogni altro vettore $\vec{x} \in \mathbb{E}^n$ che soddisfa l'equazione $\vec{a}^T (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ soddisfa anche la (1.3).

Consideriamo l'interpretazione geometrica dell'iperpiano in 2 dimensioni, la retta suddivide il piano in due regioni. Analogamente si estende questo concetto al caso di \mathbb{E}^n tramite l'idea di semispazi.

Un semispazio in \mathbb{E}^n è l'insieme dei punti che soddisfa l'equazione:

$$S^{\geq} = \{\vec{x} : \vec{a}^T \vec{x} \geq k\} \quad (1.4)$$

dove S^{\geq} è detto *semispazio positivo*; similmente si definisce il *semispazio negativo*:

semispazio positivo

$$S^{\leq} = \{\vec{x} : \vec{a}^T \vec{x} \leq k\} \quad (1.5)$$

Ovviamente un iperpiano può anche essere visto come l'intersezione del rispettivo semispazio positivo e negativo.

E' banale verificare che i semispazi sono insiemi convessi, e dall'osservazione che l'intersezione di insiemi convessi è ancora un insieme convesso, se ne deduce che anche l'iperpiano è un insieme convesso.

1.5 Raggi e direzioni

Un altro esempio di insieme convesso è il raggio. Un *raggio* è un insieme di punti della forma:

$$\{\vec{x}_0 + \lambda \vec{d} : \lambda \geq 0\}, \quad (1.6)$$

dove $\vec{d} \neq \vec{0}$. Si definisce \vec{d} come *direzione del raggio* e \vec{x}_0 viene definito come *vertice del raggio*.

raggio
direzione del
raggio
vertice del
raggio

1.6 Direzioni di un insieme convesso

Dato un insieme convesso \mathbb{X} , si dice che \vec{d} è una *direzione dell'insieme convesso*, se:

$$\begin{aligned} \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{X} : \\ \{\vec{x}_0 + \lambda \vec{d} : \lambda \geq 0\} \subseteq \mathbb{X}. \end{aligned}$$

direzione
dell'insieme
convesso

Dalla definizione, ed in particolare dalla richiesta che il raggio ricada su \mathbb{X} per ogni $\lambda \geq 0$ ne deriva che in un insieme limitato non esistono vettori \vec{d} che soddisfano la richiesta di *direzione dell'insieme convesso*.

Allora considerando un insieme illimitato $\mathbb{X} = \{\vec{x} : A\vec{x} \leq b, \vec{x} \geq 0\}$, non vuoto, allora un vettore \vec{d} è una direzione di \mathbb{X} se:

$$A(\vec{x} + \lambda \vec{d}) \leq b; \vec{x} + \lambda \vec{d} \geq 0,$$

per ogni $\lambda \geq 0$ e per ogni $\vec{x} \in \mathbb{X}$. Dall'ipotesi che $\vec{x} \in \mathbb{X}$, $A\vec{x} \leq b$, quindi prendendo un vettore \vec{d} tale che $A\vec{d} \leq 0$, allora la prima disequazione è verificata per ogni λ positivo. Analogamente nella seconda disequazione preso \vec{d} non negativo, rimane verificata per ogni valore di $\lambda \geq 0$. L'insieme \mathbb{D} delle direzioni di un insieme convesso illimitato i cui vincoli siano $\{\vec{x} : A\vec{x} \leq b, \vec{x} \geq 0\}$ è caratterizzato da:

$$\begin{aligned} A\vec{d} &\leq 0 \\ \vec{d} &\geq 0 \\ \vec{d} &\neq \vec{0} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analogamente al concetto di punto estremo il concetto di *direzione estrema* rappresenta le direzioni che non possono essere ottenute come combinazione positiva di due distinte direzioni dell'insieme. Due direzioni \vec{d}_1, \vec{d}_2 sono dette *distinte* o *non equivalenti* se \vec{d}_1 non può essere rappresentato come la moltiplicazione per un coefficiente positivo e \vec{d}_2 .

direzione
estrema

1.7 Coni convessi

Una classe importante di insiemi convessi sono i *coni convessi*. Un *cono convesso* C è un insieme convesso con la proprietà aggiuntiva che:

coni convessi

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} \in C, \lambda \geq 0 : \\ \lambda \vec{x} \in C. \end{aligned}$$

Dalla definizione, preso $\lambda = 0$, si osserva che l'origine degli assi deve appartenere a C . Poiché il raggio con vertice nell'origine è descritto dall'insieme $\{\lambda \vec{d} : \lambda \geq 0\}$, il cono C contiene interamente i raggi emanati dall'origine; lo spettro dei raggi dipende ovviamente dagli elementi iniziali in C . In realtà per definire un cono non sono necessari tutti i raggi iniziali dell'insieme C , ma solo le direzioni estreme; siano $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_k$ le direzioni estreme di C , allora il cono è definito da tutte le combinazioni non negative di $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_k$:

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{d}_j : \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

1.8 Funzioni convesse (e concave)

Analogamente all'insieme convesso si definiscono le funzioni convesse; sia f una funzione sui vettori $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n$, è detta *convessa* se per ogni coppia di vettori si verifica:

convessa

$$f(\lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{x}_2) \leq \lambda f(\vec{x}_1) + (1 - \lambda) f(\vec{x}_2), \forall \lambda \in [0, 1].$$

Se la funzione $g \equiv -f$ è convessa, allora la funzione f è detta *concava*.

concava

1.9 Insieme poliedrale e coni poliedrali

Un insieme è detto *poliedrale* se è l'intersezione di un numero finito di semi-

poliedrale

spazi. Abbiamo visto che ogni semispazio può essere ricondotto all'espressione $\vec{a}_i^T \vec{x} \leq b_i$ ¹. Supponendo che il numero di semispazi che definiscono il poliedro siano m , allora il poliedro stesso può essere definito dall'espressione:

$$P = \vec{x} : A\vec{x} \leq \vec{b},$$

dove A è una matrice $m \times n$ e dove la i -esima riga corrisponde al vettore riga a_i ; ovviamente l' i -esimo elemento di \vec{b} è b_i .

Se si verifica che il poliedro è limitato allora è detto *politopo*.

Se tutti gli iperpiani associati ai semispazi utilizzati per definire il poliedro sono attraversano l'origine, allora si dice che è un *cono poliedrico*. I poliedri conici si riconoscono dall'espressione che li definisce che è sempre del tipo:

$$C = \vec{x} : A\vec{x} \leq 0,$$

politopo

cono poliedrico

1.9.1 Punti estremi

Consideriamo d'ora in poi l'insieme \mathbb{X} definito dall'espressione:

$$\mathbb{X} = \vec{x} : A\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \tag{1.8}$$

dove la matrice A ha dimensione $m \times n$, e \vec{b} è un vettore di dimensione m . Indicheremo con *iperpiani di definizione* l'insieme degli $(m + n)^2$ iperpiani associati ai semispazi della definizione di \mathbb{X} .

iperpiani di definizione

Prima di caratterizzare i punti estremi nei poliedri, osserviamo che preso un punto $\vec{x} \in \mathbb{X}$, siano i vincoli $\alpha\vec{x} \leq \beta$ di $\mathbb{X}(\alpha \subseteq A, \text{ e } \beta \subseteq b)$ attivi per \vec{x} ³. Supponiamo che esistano $\vec{x}', \vec{x}'' \in \mathbb{X}$, tale che $\lambda\vec{x}' + (1 - \lambda)\vec{x}'' = \vec{x}$, con $\lambda \in (0, 1)$.

Dall'ipotesi che $\vec{x}', \vec{x}'' \in \mathbb{X}$ segue $\alpha\vec{x}' \leq \beta$ e $\alpha\vec{x}'' \leq \beta$, deve verificarsi la condizione $\lambda\alpha\vec{x}' + (1 - \lambda)\alpha\vec{x}'' = \alpha\vec{x} = \beta$ è che $\vec{x}' \equiv \vec{x}'' \equiv \vec{x}$, che implica $\alpha\vec{x}' = \beta$ e $\alpha\vec{x}'' = \beta$.

Un punto $\vec{x} \in \mathbb{X}$ è un *punto estremo*, se \vec{x} è individuato dall'intersezione da n , degli $m + n$, *iperpiani di definizione* linearmente indipendenti. Se più di n iperpiani di definizione attraversano il punto \vec{x} si dice *vertice degenere*.

vertice degenere

Si osserva che se $\vec{x} \in \mathbb{X}$ è ottenuto dall'intersezione di n *iperpiani di definizione*, allora i vincoli attivi associati ad x sono n ; siano α e β tali che $\alpha\vec{x} = \beta$, abbiamo visto che se esistono 2 punti \vec{x}' e $\vec{x}'' \in \mathbb{X}$ tali per cui $\lambda\vec{x}' + (1 - \lambda)\vec{x}'' = \vec{x}$, allora $\beta = \alpha\vec{x}'$ e $\beta = \alpha\vec{x}''$. Essendo i vincoli linearmente

¹se è un semispazio positivo è sufficiente considerare la disequazione equivalente che si ottiene moltiplicando entrambi i membri di $\vec{a}_i^T \vec{x} \geq b_i$ per -1 .

² $A\vec{x} \leq \vec{b}$ individua m semispazi, $\vec{x} \geq 0$ ne individua altri n

³ciò $\alpha\vec{x} = \beta$.

indipendenti la matrice che viene da essi definita ha rango massimo, per tanto il sistema $\alpha\vec{x} = \beta$ ha un'unica soluzione, quindi i punti \vec{x}, \vec{x}' e \vec{x}'' coincidono. Quindi \vec{x} è un *punto estremo* o *vertice* del poliedro \mathbb{X} .

punto estremo
vertice

Diversamente, siano r gli "iperpiani di definizione" (linearmente indipendenti) che definiscono \vec{x} , con $r < n$; siano $G\vec{x} = g$ i vincoli individuati dagli r iperpiani di definizione di \vec{x} :

$$G\vec{x} = g \Rightarrow \exists \vec{d} \neq 0 \text{ t.c. } G\vec{d} = 0, \\ \exists \epsilon > 0 \text{ t.c. } \vec{x} \pm \epsilon\vec{d} \in \mathbb{X}.$$

Posto $\vec{x}' = \vec{x} + \epsilon\vec{d}$, $\vec{x}'' = \vec{x} - \epsilon\vec{d}$, si verifica facilmente che $G\vec{x}' = G\vec{x}'' = g$, e che $\vec{x} = 0.5\vec{x}' + 0.5\vec{x}''$, quindi \vec{x} non è un punto estremo di \mathbb{X} .

1.9.2 Faccia, Spigoli, e punti estremi adiacenti

Abbiamo visto che i punti estremi sono punti di \mathbb{X} individuati da n "iperpiani di definizione", l'insieme dei punti che viene individuato dal comune insieme di "iperpiani di definizione" è detto *faccia propria*. Considerando una faccia \mathbb{F} di \mathbb{X} , indichiamo con $r(\mathbb{F})$ il numero di iperpiani di definizioni soddisfatti linearmente indipendenti soddisfatti da ogni punto di \mathbb{F} . Allora la dimensione di $\dim(\mathbb{F})$, data dall'espressione $n - r(\mathbb{F})$, indica i gradi di libertà dei punti di \mathbb{F} perché siano ancora ammissibili per l'insieme \mathbb{X} . Con queste considerazioni, i punti estremi hanno 0 "gradi di libertà".

faccia propria

Il segmento che unisce due punti estremi è detto *spigolo del poliedro*, ed i punti estremi utilizzati per definirlo sono detti *adiacenti*. Uno spigolo è individuato da $n - 1$ iperpiani di definizione.

spigolo del poliedro
adiacenti

1.9.3 Direzioni di recessione e direzioni estreme

L'insieme dei punti estremi di un iperpiano devono soddisfare equazioni analogo a quelle presentate in (1.7), l'insieme definito da questi vincoli corrisponde alla definizione di un poliedro omogeneo, conosciuto anche come *cono di recessione* (per ottenerlo è sufficiente considerare la disequazione omogenea di ogni vincolo).

cono di recessione

Al fine di eliminare direzioni ridondanti, le direzioni vengono normalizzate utilizzando il concetto di norma 1, $1^T|\vec{d}| = 1$. Ricordando che le componenti di ciascuna direzione devono essere positive, allora il vincolo di normalizzazione può essere semplificato con $1^T\vec{d} = 1$.

L'insieme:

$$D = \{\vec{d} : A\vec{d} \leq 0, 1^T\vec{d} = 1, \vec{d} \geq 0\}. \tag{1.9}$$

è detto *insieme delle direzioni di recessione* di \mathbb{X} , poiché i vincoli a cui sono

insieme delle direzioni di recessione

sottoposte le direzioni dipendono dal poliedro/insieme convesso analizzato. L'analisi dell'insieme delle direzioni di recessioni è interessante per gli aspetti che lo legano all'insieme \mathbb{X} di partenza; i punti estremi di \mathbb{D} , sono infatti le *direzioni estreme* di \mathbb{X} .

1.10 Insieme di Poliedri

1.10.1 Politopi

Consideriamo un politopo (in \mathbb{R}^2) i cui punti estremi siano $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$. Ogni punto interno, \vec{x} può essere espresso come combinazione convessa di un punto estremo (ad esempio \vec{x}_4) e di un generico punto sulla frontiera, sia \vec{y} . Essendo \vec{y} un punto sulla frontiera del politopo allora deve risiedere in una faccia (lato in questo caso) e quindi è esprimibile come combinazione lineare dei punti estremi adiacenti la faccia (in questo caso 2). Sia $\lambda \in (0, 1)$ tale che:

$$\vec{x} = \lambda \vec{y} + (1 - \lambda) \vec{x}_4,$$

e sia $\mu \in (0, 1)$ il parametro della combinazione convessa da cui ottenere \vec{y} dai punti estremi adiacenti la faccia di appartenenza:

$$\vec{y} = \mu \vec{x}_1 + (1 - \mu) \vec{x}_2.$$

allora raggruppando l'espressioni:

$$\vec{x} = \lambda \mu \vec{x}_1 + \lambda(1 - \mu) \vec{x}_2 + (1 - \lambda) \vec{x}_4.$$

Siccome $\mu, \lambda \in (0, 1)$, allora $\lambda\mu, \lambda(1 - \mu), (1 - \lambda) \in (0, 1)$; è inoltre facile verificare che $\lambda\mu + \lambda(1 - \mu) + (1 - \lambda) = 1$. \vec{x} è rappresentato come una combinazione baricentrica dei punti estremi $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4$.

1.10.2 Poliedri illimitati

Intuitivamente per rappresentare un punto dell'insieme (non limitato) è necessario individuare nel più piccolo insieme convesso individuato dai punti estremi un punto a cui aggiungerci un'opportuna combinazione lineare (non negativa) delle direzioni estreme. Supponiamo, per una semplice analisi, che \vec{y} sia individuato dalla combinazione baricentrica dei soli punti estremi \vec{x}_1, \vec{x}_3 e dalla direzione \vec{d}_1 , allora l'espressione del punto \vec{x} è:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{y} + \mu \vec{d}_2 \\ &= \lambda \vec{x}_1 + (1 - \lambda) \vec{x}_3 + \mu \vec{d}_2. \end{aligned}$$

Generalmente si dimostra che:

Teorema 1.1 (Teorema di rappresentazione generale). Sia $\mathbb{X} = \{\vec{x} : A\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}\}$ un insieme non vuoto. Allora l'insieme dei punti estremi, sia \mathbb{S}_p , è un insieme non vuoto e limitato, indichiamone con $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ i suoi elementi.

Se l'insieme \mathbb{X} è limitato allora l'insieme non ha direzioni e, rappresentando con \mathbb{S}_d l'insieme delle direzioni estreme, $\mathbb{S}_d = \emptyset$. Se l'insieme è illimitato allora sia $\mathbb{S}_d = \{\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_l\}$.

$\vec{x} \in \mathbb{X}$ se e solo se può essere rappresentato come una combinazione convessa di $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ più la combinazione lineare (non negativa) di $\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_l$, cioè:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{\lambda}^T \vec{x} + \vec{\mu}^T \vec{d}; \\ 1^T \vec{\lambda} &= 1; \\ \vec{\lambda} &\geq 0; \\ \vec{\mu} &\geq 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

dove $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ e $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^l$.

Dimostrazione. Per semplicità indicheremo con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le componenti di $\vec{\lambda}$, e con μ_1, \dots, μ_l le componenti di $\vec{\mu}$.

Dimostriamo d'apprima che l'insieme dei punti estremi è limitato, cioè $1 \leq k < +\infty$. A tale scopo supponiamo $\vec{x} \in \mathbb{X}$. Se $\vec{x} \in \mathbb{S}_p$, allora $k \geq 1$. Altrimenti sia $r (< n)^4$ il numero massimo di iperpiani di definizione soddisfatti da \vec{x} e sia $\vec{x} = \lambda \vec{y}_1 + (1 - \lambda) \vec{y}_2$, dove $\lambda \in (0, 1)$ e $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{X}$ e $\vec{y}_1 \neq \vec{y}_2$.

Considerando $\vec{d} = \vec{y}_2 - \vec{y}_1 \neq 0$, si avrà $\vec{y}_1 = \vec{x} - (1 - \lambda) \vec{d}$ e $\vec{y}_2 = \vec{x} + \lambda \vec{d}$. Considerando i vincoli cui è soggetto \mathbb{X} (tra cui i vincoli di non negatività), non entrambi \vec{y}_1 o \vec{y}_2 possono essere spostato a piacere rendendo opportunamente grande il coefficiente λ ; senza perdita di generalità supponiamo che \vec{y}_1 sia limitato (nella crescita) da almeno un vincolo di \mathbb{X} , allora sia $\gamma' = \max\{\gamma : \vec{x} - \gamma \vec{d} \in \mathbb{X}\} < \infty$. Sia $\vec{y} = \vec{x} - \gamma' \vec{d}$, \vec{y} dovrà soddisfare $r + 1$ vincoli di iperpiani di definizione. Se \vec{y} soddisfa n iperpiani di definizione, allora $\vec{y} \in \mathbb{S}_p$, altrimenti si procede in modo analogo a quanto fatto fino ad ora individuando un nuovo vertice \vec{y}' tale da soddisfare $r + 2$ iperpiani di definizione. In al più $n - r$ passi si individua un punto di \mathbb{S}_p da cui tale insieme non può essere vuoto.

Poiché il numero di modi diversi con cui scegliere n iperpiani linearmente indipendenti da un insieme di $m + n$ è limitato (esattamente $\binom{m+n}{n}$), allora $k < \infty$.

Dalla definizione di raggio è ovvio che in un insieme limitato non è possibile individuare una qualsiasi direzione per un raggio, quindi l'insieme \mathbb{S}_d deve essere vuoto. Se diversamente si avesse \mathbb{X} non limitato, allora abbiamo

⁴abbiamo escluso il caso n avendo supposto che $\vec{x} \notin \mathbb{X}$.

visto che le direzioni estreme possono essere individuate come i punti estremi dell'poliedro omogeneo associato ad \mathbb{X} , quindi applicando il procedimento precedente al poliedro omogeneo si perviene che, indicandone con l il numero dei punti estremi, $1 \leq l < \infty$.

Dimostriamo infine che i punti di \mathbb{X} assumono la forma del teorema supponendo che \vec{x} sia definito dall'equazione (1.10); da quanto detto nei paragrafi precedenti si verifica che $\vec{x} \in \mathbb{X}$. Viceversa supponiamo che $\vec{x} \in \mathbb{X}$, verifichiamo che \vec{x} può essere scritto nella forma (1.10). Sia \mathbb{X}' definito come:

$$\mathbb{X}' = \mathbb{X} \cap \{\vec{x} : 1^T \vec{x} \leq M\},$$

dove M è scelto grande a sufficienza perché si abbia $1^T \vec{x}_j < M$, per ogni $j = 1, \dots, k$ e $1^T \vec{x} < M$. Osserviamo che l'insieme \mathbb{X}' così opportunamente costruito è limitato e i punti estremi di \mathbb{X} devono essere anche punti estremi di \mathbb{X}' . Indichiamo i punti estremi di \mathbb{X}' come $\mathbb{S}'_p \equiv \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_{k+u}\}$, con $1 \leq k+u \leq \infty$. Vediamo innanzitutto che \vec{x} può essere descritto come combinazione convessa dei punti estremi di \mathbb{X}' : se $\vec{x} \in \mathbb{S}'_p$ è banale la verifica, in caso contrario, sia $G\mathbf{x} = g$ il sistema costruito con i vincoli linearmente indipendente degli iperpiani di definizione soddisfatti da \vec{x} . Ovviamente $\text{rank}(G) < n$, allora è possibile individuare un vettore $\vec{d} \neq \vec{0}$ tale che $G\vec{d} = 0$. Consideriamo il parametro $\gamma' = \max\{\gamma : \vec{x} + \gamma\vec{d} \in \mathbb{X}'\}$; avendo costruito \mathbb{X}' limitato allora $\gamma' < +\infty$, inoltre avendo $\gamma' > 0$ perché $G[\vec{x} + \gamma\vec{d}] = g, \forall \gamma$, quindi γ' è libera di andare a vincolare un nuovo iperpiano di definizione. Sia $\vec{y}_1 = \vec{x} + \gamma'\vec{d}$, per costruzione abbiamo che $\vec{y}_1 \in \mathbb{X}'$ e almeno un iperpiano di definizione di \mathbb{X}' in più rispetto ad \vec{x} viene soddisfatto. Allora considerando ora $G\vec{y}_1 = g$ il sistema definito dagli iperpiani di definizione soddisfatti da \vec{y}_1 , se la matrice G ha rango massimo, allora \vec{y}_1 è un punto estremo; se così non fosse possiamo ripetere lo stesso procedimento fino ad individuare un punto estremo di \mathbb{X}' . Chiamiamo comunque \vec{y}_1 il punto estremo individuato dopo al più $n-1$ passaggi (il caso peggiore è rappresentato dall'eventualità che \vec{x} soddisfi solo un vincolo linearmente indipendente). Definiamo adesso γ'' come segue:

$$\gamma'' = \max\{\gamma : \vec{x} + \gamma(\vec{x} - \vec{y}_1) \in \mathbb{X}'\},$$

e poniamo:

$$\vec{y}_2 = \vec{x} + \gamma''(\vec{x} - \vec{y}_1).$$

Per le stesse considerazioni precedenti abbiamo che $0 < \gamma'' < \infty$. Per la costruzione di \vec{y}_1 e \vec{y}_2 possiamo scrivere \vec{x} come combinazione convessa di \vec{y}_1 e \vec{y}_2 :

$$\vec{x} = \delta\vec{y}_1 + (1 - \delta)\vec{y}_2, \quad \delta = \frac{\gamma''}{1 + \gamma''}$$

Se $\vec{y}_2 \in \mathbb{S}'_p$ possiamo concludere, altrimenti possiamo applicare il medesimo procedimento applicato per individuare una combinazione convessa di \vec{y}_2 in cui almeno un punto sia un punto estremo di \mathbb{X}' . Iterando questo procedimento si perviene ad individuare una combinazione convessa per \vec{x} . Possiamo quindi rappresentare \vec{x} come:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j \vec{x}_j, \text{ dove } \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j = 1 \text{ e } \delta_j \geq 0. \quad (1.11)$$

Se nell'espressione (??) si ha $\delta_j = 0, \forall j > k$, allora l'espressione è della forma (1.10) e possiamo concludere. Altrimenti sia supponiamo, senza perdere in generalità, che $\delta_v > 0$, con $v > k$, il vertice x_v è quindi stato creato con il vincolo $1^T x \leq M$, quindi deve essere soddisfatto, cioè $1^T \vec{x}_v = M$. Gli altri $n-1$ iperpiani di definizione di \vec{x}_v devono essere iperpiani di definizione anche di \mathbb{X} e quindi definiscono uno *spigolo* di \mathbb{X} . Sia $\vec{x}_{v'}$ il punto estremo adiacente a \vec{x}_v , ovviamente $1 \leq \vec{x}_{v'} \leq k$. $\vec{x}_v - \vec{x}_{v'}$ è una direzione di recessione di \mathbb{X} poiché nessun altro iperpiano di \mathbb{X} ferma la retta individuata dai due vettori (nella direzione di \vec{x}_v . Posto $\theta_v = 1^T(\vec{x}_v - \vec{x}_{v'}) > 0$, sia $\vec{d} = (\vec{x}_v - \vec{x}_{v'})/\theta_v$. \vec{d} è una direzione normalizzata di \mathbb{X}' . Considerando che $\vec{x}_v, \vec{x}_{v'}$ devono soddisfare $Ax = b$ per $n-1$ iperpiani di definizione, allora la loro differenza deve soddisfare il sistema omogeneo ad esso associato per gli stessi $n-1$ iperpiani di definizione. Se infine si osserva che \vec{d} soddisfa il vincolo $1^T \vec{d} = 1$ allora \vec{d} è un punto estremo del sistema omogeneo associato e quindi è una direzione estrema di \mathbb{X} , conseguentemente si ha che $\vec{x}_v \equiv \vec{x}_{v'} + \theta_v \vec{d}_{v''}$ per un opportuno indice $1 \leq v'' \leq l$. Per cui:

$$\vec{x} = \sum_{j=0}^k \delta_j \vec{x}_j + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v x_{v'} + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v \theta_v \vec{d}_{v''},$$

che è della forma richiesta. \square

Con il precedente teorema si è dimostrato non solo che i punti interni ad un insieme convesso (illimitato oppure no) hanno la forma descritta dall'equazione (1.10), ma anche che (cosa altrettanto importante) che se l'insieme \mathbb{X} è non vuoto allora c'è almeno un punto estremo.

2

Il metodo del simplesso

2.1 Punti estremi ed ottimalità

Vogliamo dimostrare che l'ottimalità, se esiste, si trova in un punto estremo del poliedro definito dal programma lineare. Cioè si vuol dimostrare che se esiste un punto estremo ottimale, allora coincide con la soluzione ottima del problema.

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned}$$

Siano $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ i punti estremi dei vincoli del problema, e $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_l$ siano le direzioni estreme dei vincoli del problema. Dall'ultimo teorema del capitolo precedente segue che un qualsiasi punto \vec{x} soddisfacente $A\vec{x} = b$ e $\vec{x} \geq \vec{0}$ può essere scritto nella forma;

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \vec{x}_j + \sum_{j=1}^l \mu_j \vec{d}_j,$$

con i λ_j che formano una combinazione convessa ed i μ_j non negativi.

Il problema di programmazione lineare può essere trasformato nell'equivalente problema di individuare i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ tali da risolvere:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^k \lambda_j (\vec{c}^T \vec{x}_j) + \sum_{j=1}^l \mu_j (\vec{c}^T \vec{d}_j) \\ & \mathbf{1}^T \vec{\lambda} = 1 \\ & \vec{\lambda} \geq 0 \\ & \vec{\mu} \geq 0 \end{aligned}$$

Si può osservare che nel precedente problema si raggiunge il minimo della funzione obiettivo se $\vec{c}^T \vec{d}_j < 0$ per qualche j poichè μ_j può essere preso grande a piacere, per cui il minimo è $-\infty$. Se diversamente per

ogni $j = 1, 2, \dots, l$ ($\vec{c}^T \vec{d}_j \geq 0$) l'ottimo si raggiunge ponendo $mu_j = 0$ per $j = 1, 2, \dots, l$ e poi analizzando la prima sommatoria dell'espressione. Per minimizzare la quantità $\sum_{j=1}^k \lambda_j (\vec{c}^T \vec{x}_j)$, rispettando il vincolo di combinazione baricentrica costituita dai λ , supponiamo (senza perdita di generalità) che $\vec{c}^T \vec{x}_p = \min\{\vec{c}^T \vec{x}_j : j = 1, 2, \dots, k\}$. Scegliendo $\lambda_p = 1$ e $\lambda_j = 0$ per ogni $j \neq p$.

Riassumendo, se il problema non è illimitato, $\vec{c}^T \vec{d}_j \geq 0$ per tutte le direzioni estreme, la soluzione ottima del problema lineare esiste ed è finita. In oltre, in questo caso, la soluzione si trova in corrispondenza del punto estremo che ottimizza la funzione obiettivo.

Questo mostra che se una soluzione ottima esiste, la dobbiamo cercare tra i punti estremi ottimi.

2.2 Soluzione di Base Ammissibile (SBA)

Consideriamo il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con $\vec{x} \geq 0$, dove A è una matrice $m \times n$ e \vec{b} è un vettore di dimensione m . Supponiamo inoltre che $rank(A, b) = rank(A) = m$. Dopo un eventuale riordinamento delle colonne di A , sia $A = [B, N]$ dove B è una matrice $m \times m$, invertibile e N sia una matrice $m \times (n - m)$. La soluzione $\vec{x} = (\vec{x}_b, \vec{x}_n)^T$ dell'equazioni di $A\vec{x} = b$, dove

$$\vec{x}_b = B^{-1}b,$$

e

$$\vec{x}_n = \vec{0}$$

è chiamata *soluzione di base*. Se $\vec{x}_b \geq 0$, allora \vec{x} è detta *soluzione di base ammissibile*, del sistema, allora B è detta *matrice di base* e N è chiamata *matrice non di base*. Le componenti di \vec{x}_b sono dette *variabili di base*, ed analogamente le componenti di \vec{x}_n sono dette *variabili non di base*. Se il vettore \vec{x}_b ha almeno una componente nulla, allora è detto *soluzione di base degenera*.

soluzione di
base ammissibile

soluzione di
base degenera

2.2.1 Corrispondenza tra soluzione di base ammissibili e punti estremi

Consideriamo il seguente problema di progr. lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ & A\vec{x} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con rango m . Supponiamo che \vec{x} sia un punto estremo della regione ammissibile. dobbiamo dimostrare che \vec{x} è anche una soluzione di base ammissibile per il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$. Dalla definizione abbiamo che \vec{x} è individuato da n iperpiani di definizione linearmente indipendenti, poiché i vincoli $A\vec{x} = \vec{b}$ sono formati da solo m disequazioni i restanti vincoli attivi di \vec{x} bisogna cercarli nei vincoli di non negatività. Indichiamo con B la base che li contiene, ovviamente $\text{rank}(B) = m$. Scomponiamo quindi A nelle matrici B e N , per cui il sistema di equazione $A\vec{x} = \vec{b}$ si può scrivere come:

$$B\vec{x}_b + N\vec{x}_n = \vec{b}, \quad \vec{x}_b \in \mathbb{R}^m, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ è ammissibile, con $\vec{x} \geq 0$. L'osservazione che \vec{x} sia individuato dagli m iperpiani di definizione che compongono la matrice B , e implica che $N\vec{x}_n = \vec{0}$, e quindi $\vec{x}_n = \vec{0}$. Ma allora posso scrivere $B\vec{x}_b = \vec{b}$, cioè $\vec{x}_b = B^{-1}\vec{b}$. Allora il vettore \vec{x} è della forma:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_b \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \geq 0,$$

che è una soluzione di base.

Viceversa, supponiamo \vec{x} una soluzione di base ammissibile; dalla definizione di soluzione di base ammissibile ricaviamo che $\vec{x}_b = B^{-1}\vec{b}$, e $\vec{x}_n = 0$, quindi considerando la scomposizione $A = [B|N]$, è facile verificare che gli iperpiani di definizione $A\vec{x} = b$ e $\vec{x} = 0$ sono soddisfatti da \vec{x} e quindi \vec{x} è un punto estremo.

Da quanto abbiamo dimostrato ogni soluzione di base ammissibile equivale ad un punto estremo, poiché una soluzione di base ammissibile può essere individuata da più matrici di base diverse (quindi la soluzione di base ammissibile è degenera), non possiamo dire che ad ogni matrice di base corrisponde un punto estremo diverso.

2.2.2 Esistenza di una soluzione di base ammissibile

Dal teorema 1.1, se $\mathbb{X} = \{\vec{x} : A\vec{x} = b, \vec{x} \geq 0\}$ è non vuoto, allora \mathbb{X} ha almeno un punto estremo. e quindi il sistema $A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0$ ha almeno una soluzione di base ammissibile. Infatti, applicando la dimostrazione del teorema 1.1, si individua un punto estremo che è anche soluzione di base ammissibile. Assumendo, senza perdita di generalità, che $\text{rank}(A) = m$, esaminando i vincoli di non negatività soddisfatti, prendiamone $p = n - m$, corrispondenti alla variabile \vec{x}_n per cui il sistema $A\vec{x} = b, \vec{x}_n \geq 0$ ha rango n . \vec{x}_b , le rimanenti m variabili, sono le variabili di base ottenendo così una base ammissibile.

Teorema 2.1. *L'insieme dei punti estremi, corrispondente all'insieme delle soluzioni di base ammissibile, e entrambi non vuoti, dimostrano che la regione di ammissibilità è non vuota.*

Teorema 2.2. *Assumendo che la regione di ammissibilità non sia vuota. Allora una soluzione ottimale esiste se e solo se $\vec{c}d_j \geq 0$ per $j = 1, 2, \dots, l$, dove d_1, \dots, d_l sono le direzioni estreme della regione di ammissibilità. Altrimenti, il valore della soluzione ottimale è illimitato.*

Teorema 2.3. *Se una soluzione ottimale esiste, allora esiste un punto estremo ottimo.*

Teorema 2.4. *Per ogni punto estremo c'è una base corrispondente (non necessariamente unica), e, viceversa, per ogni base c'è un punto estremo corrispondente (unico). Inoltre, se un punto estremo può essere rappresentato da più di una base, allora è degenere. Viceversa, un punto estremo degenere ha più di una base che lo rappresenta se e solo se il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ esso stesso non implichi che le variabili della base degenere corrispondenti alla base associata siano identicamente nulle.*

Una soluzione ingenua del problema potrebbe quindi essere quella di considerare tutte le possibili basi che possono essere generate dall'insieme di vincoli, ne consegue, dover risolvere $\binom{n}{m}$ sistemi per valutare quello che fornisce la soluzione ottimale migliore; ovviamente questa soluzione è proibitiva quando il numero di base da analizzare è molto grande, e purtroppo con valori relativamente piccoli di n e m si raggiunge un costo complessivo elevato. Oltre a ciò il metodo ingenuo non tiene in considerazione l'eventualità che il sistema possa avere la regione ammissibile vuota (cosa che potrebbe essere scoperta solo dopo aver esaminato tutte le basi), ne riesce ad individuare regioni d'ammissibilità infinite.

2.3 Concetti di base del metodo del Simplexso

In breve il metodo del simplexso individua l'ottimalità di un punto estremo con considerazioni locali senza la necessità di individuare tutte i punti estremi o le soluzioni di base ammissibili.

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ & A\vec{x} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned}$$

dove A è una matrice $m \times n$ con rango m . supponiamo adesso di avere una soluzione $\begin{pmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ di cui conosciamo la valutazione della funzione obiettivo dall'espressione:

$$z_0 = \vec{c}^T \begin{pmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = (\vec{c}_b^T, \vec{c}_n) \begin{pmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \vec{c}_b^T B^{-1}b. \quad (2.1)$$

Indichiamo quindi con \vec{x}_b e \vec{x}_n l'insieme delle variabili di base e non di base rispettivamente, se $\vec{x} = (\vec{x}_b, \vec{x}_n)^T$ è una soluzione ammissibile, allora $\vec{x}_b, \vec{x}_n \geq 0$, e $\vec{b} = A\vec{x} = B\vec{x}_b + N\vec{x}_n$, per un opportuna scomposizione con B non singolare.

Si ricava l'espressione $\vec{b} = B\vec{x}_b + N\vec{x}_n$, moltiplicando per B^{-1} ambedue i membri ed isolando \vec{x}_b si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{x}_b &= B^{-1}\vec{b} - B^{-1}N\vec{x}_n \\ &= B^{-1}\vec{b} - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} B^{-1}N_j x_j \\ &= \vec{b} - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} \vec{y}_j x_j \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dove con \mathbb{I}_N ho voluto indicare gli indici delle variabili fuori base. Andando a sostituire l'espressione di \vec{x}_b nella funzione obiettivo si ha (ricordando il risultato della (2.1)):

$$\begin{aligned} z &= \vec{c}^T \vec{x} \\ &= \vec{c}_b^T \vec{x}_b + \vec{c}_n^T \vec{x}_n \\ &= \vec{c}_b^T (B^{-1}\vec{b} - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} B^{-1}N_j x_j) + \sum_{j \in \mathbb{I}_N} B^{-1}c_j x_j \\ &= z_0 - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} (z_j - c_j) x_j \end{aligned}$$

dove $z_j = \vec{c}_b^T B^{-1}N_j$ per ogni $j \in \mathbb{I}_N$. Allo scopo di analizzare la soluzione di base ammissibile di \vec{x} , consideriamo il problema di programmazione lineare derivato dalle considerazioni precedenti:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= z_0 - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} (z_j - c_j) x_j \\ \vec{x}_b + \sum_{j \in \mathbb{I}_N} \vec{y}_j x_j &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0, \text{ e } x_j \geq 0, \forall j \in \mathbb{I}_N \end{aligned} \quad (2.3)$$

possiamo supporre, senza perdita di generalità che in ogni vincolo di (2.3) non tutte le variabili fuori base siano nulle, se così fosse il vincolo sarebbe risolto e quindi "cancellabile" dall'analisi del sistema. Le variabili di base, essendo tutte positive, possono essere viste come variabili di *slack*, quindi possiamo riscrivere il sistema privo delle variabili di base, detto *sistema in forma canonica*:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = z_0 - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} (z_j - c_j) x_j \\ & \sum_{j \in \mathbb{I}_N} \vec{y}_j x_j \leq \vec{b} \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{I}_N \end{aligned} \quad (2.4)$$

Possiamo adesso osservare che il problema iniziale è stato ricondotto ad un problema di programmazione lineare di dimensione $p = (n - m)$ ovviamente più piccolo del problema iniziale con n variabili da risolvere. Ma il risultato più importante che si riesce ad ottenere da questa forma è che se il *vettore dei costi ridotti* ha tutte le componenti minori di zero, allora $z \geq z_0$ per ogni soluzione di $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_{n-m})$, si raggiunge l'ottimo (cioè il minimo in questo caso) quando $\vec{v}x_n$ è uguale al vettore nullo.

vettore dei
costi ridotti

Osservazione 2.1. Se $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j \in \mathbb{I}_N$, la soluzione corrente è la soluzione di base ammissibile ottimale.

Il sistema in *forma canonica* fornisce altre informazioni sul risultato del problema di programmazione lineare, infatti se esiste una componente del *vettore dei costi ridotti*, sia k , per cui $(z_k - c_k) > 0$ allora, al fine di ottenere la forma ottima del vettore dei costi ridotti, la variabile k deve essere "elaborata". Essa infatti rappresenta una componente il cui costo associato può ancora essere ottimizzato, quindi tenendo fisse le altre componenti della variabili di base ci si sposta lungo il vincolo relativo alla variabile k -esima per ottimizzarne il valore. Se il problema non è illimitato allora non sarà possibile aumentare indiscriminatamente il valore della k -esima variabili fuori base fino a che un nuovo vincolo non viene soddisfatto. Durante questo spostamento si perde un vincolo, nel senso che pur mantenendo verificata la disequazione sul vincolo (per rimanere nella regione di ammissibilità) si perde l'uguaglianza. E' quindi importante scegliere quale vincolo non soddisfare più in modo da massimizzare l'ottimizzazione corrente, e al tempo stesso, per non escludere un vincolo che potrebbe essere un vincolo soddisfatto dalla soluzione di base ottimale. La scelta quindi viene effettuata cercando tra l'insieme dei vincoli correntemente soddisfatti (esattamente m) quello che avrebbe l'influenza minore sulla funzione obiettivo dopo aver soddisfatto il k -esimo vincolo.

2.3.1 Algebra del Simplexso

Vediamo come queste considerazioni si riflettono nel metodo numerico che risolvere il problema di ottimizzazione di un insieme di vincoli. Dato il problema di programmazione lineare iniziale di cui sappiamo che $\begin{pmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ è una soluzione di base ammissibile, possiamo scrivere il *sistema in forma*

canonica corrispondente:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = z_0 - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} (z_j - c_j) x_j \\ & \vec{x}_b + \sum_{j \in \mathbb{I}_N} \vec{y}_j x_j = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0, \text{ e } x_j \geq 0, \forall j \in \mathbb{I}_N \end{aligned} \quad (2.5)$$

Come detto se per tutti i vale $(z_j - c_j) \leq 0$ la soluzione individuata è ottima e quindi è possibile terminare il metodo del simpleso. Supponiamo allora che esista almeno un indice per cui $(z_j - c_j) > 0$. Indichiamo quindi con k l'indice cui corrisponde il costo ridotto massimo, cioè:

$$(z_k - c_k) = \max_{j \in \mathbb{I}_N} \{z_j - c_j : (z_j - c_j) > 0\}.$$

Per muoverci solo lungo l'asse relativo alla variabile x_k , costruiamo un vettore \vec{x}_n che abbia tutte le componenti nulle ad eccezione della k -esima, e che sia una soluzione ottima per il problema (2.5). Poiché l'unica componente del vettore \vec{x}_n non vincolata dalle ipotesi è la k -esima vediamo quali condizioni deve soddisfare; si riscrive (2.5) ricordando le ipotesi sulla struttura di \vec{x}_n :

$$\begin{aligned} \min \quad & z = z_0 - (z_k - c_k) x_k \\ & \begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Br} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{pmatrix} x_k \end{aligned} \quad (2.6)$$

Abbiamo già determinato che la variabile che deve entrare in base è la variabile k -esima, dobbiamo determinare la variabile uscente, a tal proposito consideriamo il vettore $\vec{y}_k = (y_{1k} \dots y_{mk})^T$ che ricordo essere determinato come $B^{-1}N_k$, cioè è la k -esima colonna di N moltiplicata per B^{-1} . Se tutte le componenti di \vec{y}_k sono negative o uguali a zero, posso incrementare il coefficiente x_k pur mantenendo verificata la disuguaglianza

$$\vec{y}_k x_k \leq \vec{b}.$$

Questa è la situazione che si presenta se la regione ammissibile è illimitata.

Supponiamo, che la regione ammissibile non sia illimitata, e che quindi esista almeno un coefficiente $y_{ik} > 0$ per cui incrementato x_k il corrispondente x_{B_i} tenda a diminuire. Per mantenerci all'interno della regione di ammissibilità dobbiamo soddisfare il vincolo di non negatività allora x_k può essere

aumentata fintanto che $x_{B_i} = 0$. Poiché ad ogni passaggio più componenti del vettore \vec{y}_k possono essere positivi scegliamo il valore di x_k tale che almeno una componente del vettore x_B si annulli e le restanti rimangano positive, cioè:

$$x_k = \frac{\tilde{b}_r}{y_{rk}} \equiv \min_{j \in \mathbb{I}_N} \left\{ \frac{\vec{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}. \quad (2.7)$$

Dall'equazione precedente si ricava, oltre che il valore di x_k anche il fatto che la variabile uscente della base è la r -esima variabile di base, essa infatti verrà annullata nell'equazione (2.6) con la scelta di x_k di (2.7). E' interessante osservare che più di una componente può essere annullata dall'espressione (2.6), quando ciò avviene la soluzione di base trovata è una soluzione di base degenera.

In assenza di "degenerazione", allora $\tilde{b} > 0$, per cui $x_k = \tilde{b}_r/y_{rk}$, per qualche r , è strettamente positivo. Ma allora dalla funzione obiettivo di (2.6) e dal fatto che $z_k - c_k > 0$ segue $z < z_0$, quindi ad ogni passo del simplexso la funzione obiettivo viene certamente "ottimizzata". Con una breve anticipazione sulla convergenza del metodo possiamo anche osservare che vista la stretta disuguaglianza delle valutazioni della funzione obiettivo allora il metodo non individuerà più di una volta la stessa *matrice di base*.

Dalle considerazioni fatte (e nelle relative ipotesi), ricordando (2.2):

$$\begin{aligned} \vec{x}_n &= \frac{\tilde{b}_r}{y_{rk}} e_i \\ \vec{x}_b &= \tilde{b} - B^{-1}N\vec{x}_n \end{aligned}$$

$\vec{x} = \left(\vec{x}_b, \vec{x}_n \right)$, \vec{x} è soluzione del problema iniziale, inoltre per costruzione del vettore \vec{x}_n tale soluzione deve essere ammissibile e "migliore" della soluzione \vec{x} (nel senso di ottimalità della funzione obiettivo).

Dimostriamo che \vec{x} è anche una soluzione di base dimostrando che esiste una matrice \tilde{B}^{-1} tale che $\vec{x} = \tilde{B}^{-1}\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{B}^{-1}B^{-1}\mathbf{b}$. Dall'ipotesi che \vec{x} fosse una soluzione di base ne deriva che esistono m colonne linearmente indipendenti di A tali da costruire la matrice B , indichiamo tali colonne come $a_{B_1}, a_{B_2}, \dots, a_{B_r}, \dots, a_{B_m}$, dall'ipotesi che $y_{rk} \neq 0$ e ricordando che y_{rk} è il coefficiente di a_{B_k} per individuare la colonna k -esima di N $\vec{y}_k = B^{-1}N_k \Rightarrow N_k = B\vec{y}_k$, allora dalla precedente sezione i vettori $a_{B_1}, a_{B_2}, \dots, a_{B_{r-1}}, N_k, a_{B_{r+1}}, \dots, a_{B_m}$ sono linearmente indipendenti.

2.3.2 Interpretazione dei costi ridotti $z_k - c_k$

Ricordiamo che il calcolo dell'ottimalità della soluzione può essere fatto, in forma vettoriale, come:

$$z = \bar{\mathbf{c}}_B^T \vec{b} - \underbrace{(\bar{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} N_k - c_k)}_{z_k} x_k \quad (2.8)$$

Dove il vettore delle variabili fuori base è della forma

$$\vec{\mathbf{x}}_N = x_k \mathbf{e}_i.$$

poiché deve valere l'espressione (2.2) se ne deduce che incrementando la nuova variabile in base (la k -esima fuori base) della quantità x_k , le componenti della base che rimangono in base devono essere decrementate. In particolare se k -esima variabile è incrementata di una unità, allora le variabili x_{B1}, x_{B2}, \dots sono decrementate rispettivamente di y_{1k}, y_{2k}, \dots . Quindi il risparmio sulle variabili di base che rimangono in base può essere quantificato come: $\sum_{i=1}^m c_{Bi} y_{ik} = \bar{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} N_k = z_k$, mentre il costo aggiunto dovuto ad x_k è c_k . Quindi la differenza dei costi rappresenta il guadagno in termini di funzione obiettivo dello spostamento da un punto estremo ad un altro, più in generale (perché i punti estremi potrebbe coincidere) da una matrice di base ad un'altra. Per $z_k - c_k > 0$, considerando che il termine nella (2.8) compare negativo, allora i maggiori costi si traducono nella valutazione della funzione obiettivo in valori più piccoli della precedente soluzione. Se invece fossero $z_k - c_k < 0$, il risparmio delle variabili di base non viene compensato da un guadagno sulla nuova variabile sufficiente, questo si traduce in una funzione obiettivo più costosa. In ultima analisi, il caso $z_k - c_k = 0$ è un caso particolare, dove il cambiamento di base non porta alcun beneficio in termini di funzione obiettivo, la cui valutazione rimane invariata.

Osserviamo che se cercassimo la variabile entrante tra le variabili di base si osserverebbe un caso analogo all'ultima situazione presentata, infatti, posta a_{Bt} la variabile entrante, allora $z_k = \bar{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} N_k = \bar{\mathbf{c}}_B^T B^{-1} a_{Bt} = \bar{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{e}_t = c_t$, allora $z_k - c_k \equiv z_t - c_t = 0$.

2.4 Condizioni di terminazione: ottimalità e illimitatezza

Riassumendo la scelta delle variabili entranti e delle variabili uscenti possono essere così sintetizzate:

Entering: x_k dovrebbe entrare in base se $z_k - c_k > 0$

Leaving: x_{B_r} dovrebbe entrare in base se:

$$\frac{\tilde{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Se queste situazioni non dovessero presentarsi vediamo cosa accade:

2.4.1 Terminazione con ottimalità

Considerando il problema iniziale, sia $\vec{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ 0 \end{pmatrix}$ una soluzione ammissibile di base per cui $z_j - c_j \leq 0$, allora per ogni soluzione ammissibile del problema di programmazione lineare possiamo scrivere la funzione obiettivo come:

$$z = \vec{c}_B^T B^{-1} \vec{b} - \sum_{j \in \mathbb{I}_N} (z_j - c_j) x_j. \quad (2.9)$$

Dalla precedente espressione poiché $(z_j - c_j) \leq 0, \forall j \in \mathbb{I}_N$ la soluzione che minimizza z è quella le cui componenti relative alle variabili fuori base sono nulle. Quindi certamente \vec{x} è una soluzione ottima del problema.

2.4.2 Soluzione ottima unica e soluzioni multiple

Dai *coefficienti dei costi ridotti* si ricava informazioni circa l'unicità della soluzione. Se $(z_j - c_j) < 0, \forall j \in \mathbb{I}_N$ è facile verificare che l'unica soluzione che minimizza l'espressione (2.9) è quella in cui le variabili fuori base sono tutte nulle. Poiché tali variabili vincolano le variabili in base tale soluzione è unica.

Se esiste qualche indice $k \in \mathbb{I}_N$ per cui $(z_k - c_k) = 0$, allora la variabile relativa a k può crescere indefinitamente oppure può crescere fino a quando non viene bloccata da un vincolo. In ambedue i casi è però possibile individuare una soluzione di base ammissibile ottima i cui valutazioni della funzione obiettivo coincidono (proprio perché il fattore moltiplicativo $(z_k - c_k)$ è nullo).

2.4.3 Illimitatezza

Supponiamo di essere nella condizione che esiste un'indice $k \in \mathbb{I}_N$ per cui $(z_k - c_k) > 0$ e $\vec{y}_k \leq \vec{0}$. Allora la variabile fuori base x_k è quindi la variabile eletta per entrare in base. Osservando che nell'equazione

$$z = \vec{c}_B^T B^{-1} \vec{b} - (z_k - c_k) x_k.$$

per $x_k \rightarrow +\infty$, la quantità $z \rightarrow -\infty$. La variabile x_k , generalmente, non può essere resa troppo piccola, altrimenti qualche altra variabile di base verrebbe ad assumere valori negativi; quindi la soluzione non sarebbe più ammissibile. Come visto per non permettere che ciò avvenga la variabile x_k viene fatta crescere tanto quanto lo permette la variabile che in base per prima si annulla. Algebricamente ciò viene fatto osservando il sistema

$$\vec{x}_b = B^{-1}b - \vec{y}_k x_k.$$

Ma se $\vec{y}_k \leq 0$ allora nessuna componente relativa alle variabili di base può diventare negativa per qualsiasi valore di x_k , quindi x_k può assumere valori grandi a piacere per ognuno dei quali la valutazione della funzione obiettivo è sempre maggiore della precedente. Siamo in una situazione di illimitatezza.

Dalle precedenti osservazioni possiamo estrapolare il seguente teorema:

Teorema 2.5 (Terminazione). *In assenza di degenerazione, il metodo del simplesso termina in un numero finito di iterazione, o con una soluzione di base ottimale oppure con la conclusione che il valore ottimale è illimitato.*

3 Soluzione iniziale e convergenza

Dal precedente capitolo, è evidente che per applicare il metodo del simplesso è necessaria, come condizione d'innescò, individuare una soluzione di base ammissibile di partenza (e relativa matrice di base).

Caso facile Considerando il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned}$$

dove A è una matrice $m \times n$ e \vec{b} un vettore non negativo di m elementi. Introducendo il vettore delle variabili di slack \vec{x}_s , il problema di programmazione lineare individuato è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} + 0^T \vec{x}_s \\ & A\vec{x} + \vec{x}_s = \vec{b} \\ & \vec{x}, \vec{x}_s \geq 0 \end{aligned}$$

Possiamo osservare che con il vettore \vec{x}_s è un vettore di m elementi, quindi all'interno della matrice dei vincoli abbiamo introdotto la matrice identità; i coefficienti dei vincoli possono dalla matrice della forma (A, I) , di dimensione $m \times (n + m)$. È facile quindi individuare nella matrice identità la matrice di base iniziale e quindi ponendo $\vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ si ottiene una *soluzione di base ammissibile* con cui innescare il metodo del simplesso.

3.1 Variabili artificiali

Purtroppo il caso presentato precedentemente non è un caso generale, pertanto dobbiamo descrivere un procedimento applicabile a qualsiasi problema di programmazione lineare. Ad esempio a problemi in cui i vincoli sono della

forma $Ax \geq b$, o ancora problemi in cui non è necessaria l'introduzione di variabili di slack come $Ax = b$. In tutti questi casi si individua a partire dal problema di programmazione lineare un problema detto *ausiliario*, dove sono introdotte le *variabili artificiali* \vec{x}_a . Il problema ausiliario è quindi definito come la risoluzione del sistema dei vincoli $A\vec{x} + \vec{x}_a = \vec{b}$. Nella costruzione del problema ausiliario abbiamo forzato all'interno della matrice dei vincoli la matrice identità per cui possiamo utilizzarla come matrice di base e creare una soluzione di base ammissibile ponendo le componenti relative alle variabili ausiliare uguali a \vec{b} e le restanti a 0. Con questo meccanismo abbiamo individuato l'innesco per il metodo del simplesso, purtroppo il problema da risolvere non è lo stesso iniziale, infatti in questo caso la matrice dei vincoli è (A, I) .

ausiliario

variabili artificiali

Benché le variabili di slack e le variabili ausiliare vengano utilizzate in modo simile, il problema da esse determinato è profondamente diverso perché mentre le variabili di slack sono utilizzate per trasformare il problema iniziale in problema ad esso equivalente ma in forma standard, le variabili ausiliare sono uno strumento che individua un problema diverso dall'originale ma che permette di individuare una matrice di base ammissibile per il 1 problema originale, sotto opportune condizioni.

Le variabili ausiliarie sono utilizzate in diversi modi, in questi appunti vedremo il **metodo delle due fasi** e il metodo delle **big-M**.

3.1.1 Metodi delle 2 fasi

Consideriamo il *problema ausiliario* $A\vec{x} + \vec{x}_a = \vec{b}$, se il problema originale ha una soluzione ammissibile, allora considerando la funzione obiettivo " $\min 1^T \vec{x}_a$ " per il problema ausiliario tale funzione avrà valore ottimo nel caso in cui $\vec{x}_a = \vec{0}$. Individuando la validità di questa osservazione abbiamo anche informazioni relative alla matrice di base per il problema originale, ma prima di introdurre queste considerazioni illustriamo brevemente il *metodo delle due fasi*.

metodo delle due fasi

I° fase Si costruisce il problema ausiliario associato al problema originale:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1^T \vec{x}_a \\ & A\vec{x} + \vec{x}_a = \vec{b} \\ & \vec{x}, \vec{x}_a \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se il problema ammette soluzione ottimale $\vec{x}_a \neq 0$ allora l'intero processo si arresta perché, per i motivi che vedremo, il problema non ammette soluzione. Altrimenti, indichiamo con \vec{x}_b e con \vec{x}_n , rispettivamente, le variabili di base e le variabili fuori base e iniziamo la fase 2.

II° fase Se la soluzione di base ammissibile corrente è ottima allora si ferma il metodo.

Se si individua che il problema è illimitato superiormente allora si ferma il metodo.

Altrimenti si costruisce la *forma canonica* del problema originale relativa alla base individuata dalle variabili di base della soluzione corrente, sia B .

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\mathbf{c}}_b^T \vec{x}_b + \bar{\mathbf{c}}_n^T \vec{x}_n \\ & \vec{x}_b + B^{-1}N\vec{x}_n = B^{-1}\vec{\mathbf{b}} \\ & \vec{x}_b, \vec{x}_n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si applica il metodo del simplesso individuato una nuova soluzione di base ammissibile che abbia una valutazione della funzione obiettivo migliore od uguale alla soluzione precedente.

Analizziamo il significato che dei valori che può assumere il vettore delle variabili ausiliarie:

$\vec{x}_a \neq 0$ Assumendo il problema ausiliario, associato al problema originale, abbia soluzione ottimale diversa dal vettore nullo, allora il problema originale non ha una soluzione di base ammissibile, cioè la regione di ammissibilità del problema originario è vuota. Dimostriamolo osservando che se così non fosse, allora esisterebbe una soluzione di base ammissibile, $\vec{\mathbf{x}}$, per il problema originario: $A\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, dove $\vec{\mathbf{x}} \geq 0$.

Allora il vettore della forma $\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}} \\ 0 \end{pmatrix}$, dove $\vec{\mathbf{x}}$ si riferisce alla soluzione del problema originario, sarebbe una soluzione del problema ausiliario e inoltre la corrispondente valutazione della funzione obiettivo sarebbe: $0^T(\vec{\mathbf{x}}) + 1^T(0) = 0 < 1^T\vec{x}_a$. Siamo giunti ad un assurdo.

$\vec{x}_a = 0$ In questa situazione dobbiamo distinguere ulteriormente l'analisi dei passi da eseguire, il caso semplice da elaborare è la situazione in cui tra le variabili di base della soluzione del problema ausiliario non compaiono variabili artificiali, ma solo *variabili originarie*, cioè variabili relative al problema iniziale che stiamo tentando di risolvere, e il caso contrario.

variabili ori-
ginarie

Se la base della soluzione ottimale non presenta variabili ausiliarie, allora possiamo utilizzare la matrice di base individuata per procedere al passo II del metodo delle due fasi. Per rendere il processo efficiente la costruzione della matrice $B^{-1}N$ può essere fatta a partire dalla ultimo passaggio della prima fase, in cui tramite il metodo del simplesso si è ottenuta la matrice B^{-1} ; sempre dall'ultimo passaggio del metodo del simplesso nella prima fase si ottiene il vettore $B^{-1}\vec{\mathbf{b}}$.

Matrice di base con variabili del problema ausiliario Nel caso in cui la matrice di base della soluzione ottimale del problema ausiliario siano presenti ancora delle variabili artificiali si può procedere immediatamente alla fase II modificandola in modo da dare la precedenza, nella eliminazione di variabili dalla base, alle variabili artificiali; ovviamente in questo caso il metodo del simplesso deve essere modificato anche per non permettere alle variabili artificiali di assumere valori diversi da 0 dopo che sono state annullate, perché la soluzione calcolata non sarebbe più soluzione del problema originario.

Un approccio opposto consiste nell'eliminare le variabili artificiali prima che venga iniziata la II° fase del metodo, questo approccio consente di utilizzare un'algoritmo standard del metodo del simplesso in cui non sia necessario introdurre ulteriori vincoli da soddisfare.

Per semplicità di spiegazione supponiamo che solamente una variabile artificiale sia ancora nella matrice di base, allora andiamo ad eliminare le altre variabili artificiali rimaste fuori base, il sistema è quindi:

$$(A_1, \dots, A_{m-1}, e_m) \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_{m-1} \\ \vec{x}_{a_m} \end{pmatrix} + (A_m, \dots, A_{m+h}, \dots, A_n) \begin{pmatrix} \vec{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \vec{x}_{m+h} \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = b$$

Dall'ipotesi che $\vec{x}_a = 0$ allora anche la m -esima variabile artificiale è nulla, quindi la soluzione di base ammissibile è una soluzione di base degenera. Dall'analisi fatta sull'interpretazione geometrica delle soluzioni di basi degenerate sappiamo che esiste un'altra base che genera la stessa soluzione di base ammissibile; poiché nel problema che siamo analizzando le variabili fuori base che compaiono sono solo variabili originali, ciò significa che deve esistere una diversa matrice di base contenente solo variabili originali che genera la stessa soluzione di base ammissibile.

Si esegue un'operazione di pivoting "particolare" in cui si forza che la variabile uscente sia, ovviamente, la m -esima, corrispondente alla variabile artificiale in base. La variabile da far entrare in base viene scelta tra una delle variabili originarie fuori base, rispettando le richieste di pivoting, per cui $\vec{y}_{kh} \neq 0$, dove h è l'indice della variabile fuori base da far entrare. Osservando la m -esima equazione del sistema precedente:

$$\vec{x}_{a_m} + y_{1m}\vec{x}_m + \dots + y_{hm}\vec{x}_{m+h} + \dots + y_{n,m}\vec{x}_n = b_m$$

Si osserva che andando a sostituire la h -esima variabile fuori base con la m -esima variabile di base la componente m -esima del vettore dei coeffi-

cienti non viene cambiato, quindi la nuova matrice di base procedure la stessa soluzione di base ammissibile. Questo procedimento è reiterato fino a che non siano state eliminate tutte le variabili artificiali dalla matrice di base. Si procede poi alla fase 2.

3.1.2 Metodo delle Big-M

Un approccio completamente diverso alle variabili artificiali è dato dal metodo delle **big-M**. Abbiamo detto che le variabili artificiali sono uno strumento, e come tale può essere interpretato in diversi modi. Nel metodo delle 2 fasi le variabili artificiali sono utilizzate per individuare una matrice di base (non necessariamente la migliore) per il problema originale, successivamente il metodo del simplesso veniva utilizzato in modo molto simile a quello descritto nel capitolo precedente (se si sceglie di togliere le variabili artificiali prima del fase II del metodo, allora è possibile utilizzare esattamente il metodo del simplesso descritto).

Nel *metodo delle big-M* non si scompone la risoluzione del problema in due fasi, ma si introducono le variabili artificiali assegnandogli un costo, nella funzione obiettivo, sufficientemente grande da rendere indesiderabile la loro presenza nella soluzione ottimale. Il metodo del simplesso non viene minimamente modificato, ma si sfruttano le sue peculiarità per introdurre una matrice di base nota all'interno dei vincoli per poi impedire che tali variabili vengano utilizzate nella soluzione ottimale. Dalle conoscenze acquisite sulla forma della soluzione di base ottimale, sappiamo che tutte le variabili al di fuori delle variabili di base sono nulle, e quindi anche le variabili artificiali lo saranno, quindi il problema $A\vec{x} + \vec{x}_a = \vec{b}$ corrisponderà al problema $A\vec{x} = \vec{b}$ se le variabili artificiali sono tutte nulle.

metodo delle
big-M

Il problema associato al metodo delle **big-M** da risolvere, considerando il solito problema iniziale, è:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} + M\vec{1}^T \vec{x}_a \\ & A\vec{x} + \vec{x}_a = \vec{b} \\ & \vec{x}, \vec{x}_a \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per l'analisi del metodo delle big-M distinguiamo le differenti condizioni di terminazione che si possono presentare:

$(\vec{x}^*, 0)^T$ **soluzione ottimale di (3.3)** La soluzione è ottimale anche per il problema originale; supponendo che $(\vec{x}, 0)$, sia un'altra soluzione di (3.3), abbiamo $\vec{c}^T \vec{x}^* + 0 \leq \vec{c}^T \vec{x} + 0$, cioè $\vec{c}^T \vec{x}^* \leq \vec{c}^T \vec{x}$. \vec{x}^*, \vec{x} , per costruzione, sono soluzioni anche del problema originale, e quindi \vec{x}^* ne deve essere la soluzione ottima.

(\vec{x}^*, \vec{x}_a^*) **soluzione ottima di (3.3)**, e $\vec{x}_a^* \neq 0$ Se M è un numero positivo molto grande, si può concludere che il problema originale non ha soluzione ammissibile; se questa esistesse, indichiamo con \vec{x} , allora $(\vec{x}0)^T$ sarebbe soluzione di (3.3), e quindi avremmo:

$$\vec{c}^T \vec{x} + M\vec{1}^T \vec{0} \leq \vec{c}^T \vec{x}^* + M\vec{1}^T \vec{x}_a^*,$$

contro l'ipotesi che (\vec{x}^*, \vec{x}_a^*) sia soluzione ottimale del problema (3.3).

(3.3) **ha soluzione ottimale illimitata** Se durante l'esecuzione del metodo del semplice si individua che la regione ammissibile è illimitata e per la funzione obiettivo imposta si ha che è sempre possibile trovare una soluzione di base ammissibile che abbia una valutazione migliore rispetto alla precedente, allora siamo nella condizione di soluzione ottimale illimitata. Se questa condizione è stata raggiunta quando ormai più nessuna variabile artificiale era in base allora anche il problema originale ha soluzione ottima illimitata. Per dimostrarlo osserviamo che se il problema (3.3) è illimitato allora esistono due direzioni $(\vec{d}_1, \vec{d}_2) \geq (0, 0)$ dell'insieme $\{(\vec{x}, \vec{x}_a) : A\vec{x} + \vec{x}_a = \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \vec{x}_a \geq 0\}$ per cui $\vec{c}^T \vec{d}_1 + M\vec{1}^T \vec{d}_2 < 0$. Poiché M è molto grande, per $\vec{d}_2 \geq 0$ e $\vec{c}^T \vec{d}_1 + M\vec{1}^T \vec{d}_2 < 0$, implica $\vec{d}_2 = \vec{0}$, e quindi $\vec{c}^T \vec{d}_1 < 0$. Allora abbiamo trovato una direzione per l'insieme $\{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0\}$ per cui $\vec{c}^T \vec{d}_1 < 0$.

Diversamente, se la condizione di soluzione ottimale illimitata è stata raggiunta con alcune variabili artificiali in base allora il problema originale potrebbe non avere soluzione.

Confronto fra metodo delle big-M e metodo delle due fasi Il metodo delle **big-M** è certamente più semplice ed intuitivo da utilizzare rispetto al metodo delle due fasi, ma porta con sé alcune problematiche legate proprio al fattore M . Dobbiamo infatti tenere in considerazione, visto che i metodi analizzati sono metodi numerici, i problemi legati alla rappresentazione dei numeri sui calcolatori. Come sappiamo tale rappresentazione è soggetta ad errori, sappiamo che per questa limitazione alcune operazioni banali come la sottrazione possono diventare delle operazioni mal condizionate al crescere della differenza tra i numeri su cui si lavora. Il metodo delle big-M, per impostazione, deve far convivere nella funzione obiettivo i coefficienti delle variabili originali e le M legate alle variabili artificiali che devono essere “molto grandi”; se i coefficienti delle variabili originali sono molto piccoli (ma non nulli), il metodo delle **big-M** potrebbe fornire risultati sbagliati per problemi legati al condizionamento.

Un altro problema legato all'utilizzo del metodo delle **big-M** è rappresentato dalla scelta del parametro M che deve essere "sufficientemente" grande da rendere sgradevole la presenza delle variabili artificiali nella matrice di base; certamente se il problema è limitato esiste un valore di M sufficientemente grande da soddisfare i requisiti del metodo, ma non può essere impostato a priori. Prima di avviare il metodo delle **big-M** è necessaria un'analisi del problema da risolvere (non è sufficiente analizzare la funzione obiettivo; è necessario maggiorare i coefficienti che possono assumere i valori della funzione obiettivo durante l'applicazione del metodo del simplesso).

3.2 Degenerazione, cycling e stallo

Nelle analisi fin'ora condotte si è sempre assunto l'assenza di degenerazione, purtroppo questa è un'eventualità che nella pratica si può verificare.

Computazionalmente, la presenza di basi degeneri può comportare delle situazioni di *cycling*, ovvero situazioni in cui si cicla in una stessa sequenza di basi. In presenza di soluzione di base degenera sappiamo che la stessa soluzione può essere individuata da più matrici di base (senza ovviamente modificare la sua valutazione della funzione obiettivo), in casi estremi può verificarsi che il metodo del simplesso alternativamente individui una matrice di base e poi l'altra. In generale il metodo cicla attraverso una sequenza di basi (nessuna ottimale) B_1, B_2, \dots, B_t , con $B_t = B_1$. Ovviamente, in questa situazione, l'algoritmo non è in grado di uscire dal loop automaticamente; dobbiamo intervenire introducendo opportuni meccanismi utili ad evitare queste situazioni.

cycling

Esistono diversi metodi utili a questo scopo, tutti però devono soddisfare il teorema

Teorema 3.1. *Dato un punto estremo ottimo, deve esistere una matrice di base associata (ottima) per cui il vettore dei costi ridotti è nonpositivo: $z_j - c_j \leq 0$, $j = 1, \dots, n$.*

3.2.1 Regola di Bland

La *regola di Bland* è una semplice regola utilizzata per prevenire cicli, per tale regola si fa l'assunzione che le variabili possano essere ordinate secondo qualche condizione; supponiamo che l'ordinamento sia x_1, x_2, \dots, x_n . Allora durante l'operazione di pivoting, la variabile non di base entrante è la variabile con indice d'ordine minore (tra tutte quelle per cui $z_j - c_j > 0$). Analogamente la scelta della variabile uscente viene fatta prendendo la va-

regola di Bland

riabile di base il cui indice d'ordine è il più piccolo tra tutte le variabili candidate.

L'utilizzo della regola di Bland ha un costo dovuto alla minor velocità di convergenza del metodo del simplesso, questa "lentezza" è dovuto alla scelta delle variabili uscenti che non è fatta con condizioni di ottimalità ma con condizioni che garantiscano la convergenza del metodo stesso.

In pratica nelle implementazioni del metodo del simplesso non vengono utilizzati regole per garantire la terminazione del metodo, questo per ragioni di efficienza e per ragioni statistiche; è raro che si presentino delle situazioni di degenerazione tali per cui tutte le componenti del vettore dei coefficienti noti (RHS) risultino nulle.

Questi metodi vengono però utilizzati per eliminare l'occorrenza di un'altra anomalia del metodo del simplesso nota col nome di *stallo*; è possibile che il metodo del simplesso possa attraversare una sequenza eccessivamente lunga (ma finita) di pivot degeneri. Tale sequenza può rallentare (anche notevolmente) la velocità di convergenza del metodo in queste particolari situazioni. E' possibile però applicare dinamicamente la regola di Bland, quando ci si rende conto che il numero di iterazioni richieste dal metodo del simplesso è maggiore del necessario.

stallo

4 Implementazione del metodo del simplesso e ottimizzazione

Vediamo alcune tecniche per implementare efficientemente il metodo del simplesso nel computer. A tal proposito schematizziamo i passi il metodo del simplesso (supponiamo di avere una matrice di base, e sia B^{-1} l'inversa):

1. Costruiamo la soluzione di base ammissibile a partire dalla matrice di base:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

La funzione obiettivo vale $z = \vec{c}_b^T \vec{x}_b = v\vec{c}_b^T B^{-1}b$.

2. Si calcola il vettore dei moltiplicatori del simplesso, $\vec{w} = \vec{c}_b^T B^{-1}$. Per ogni variabile non di base, calcoliamo $z_j - c_j = \vec{c}_b^T B^{-1}A_j - c_j = \vec{w}A_j - c_j$. Sia $z_k - c_k$ la massima differenza tra i $z_j - c_j$. Se $z_k - c_k \leq 0$ il metodo si ferma avendo individuato la *soluzione ottima*.
3. Si calcola il vettore $\vec{y}_k = B^{-1}A_k$. Se $\vec{y}_k \leq 0$ il metodo si ferma; la soluzione ottima è illimitata. Altrimenti si individua la variabile che deve uscire di base

$$\frac{\mathbf{x}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\mathbf{x}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

4.1 Metodo del simplesso modificato

Quando i computer non erano in grado di macinare milioni di operazioni in pochi minuti, e la memoria era una delle componenti più costose dei computer, era importante individuare metodi che utilizzassero una quantità di memoria piccola. Il metodo del simplesso modificato è un'implementazione

Base inversa	RHS
\vec{w}	$\vec{c}_b^T \vec{x}_b$
B^{-1}	\vec{b}

Base inversa	RHS	x_k
\vec{w}	$\vec{c}_b^T \vec{x}_b$	$z_k - c_k$
B^{-1}	\vec{b}	\vec{y}_k

che sfrutta solamente una minima parte della memoria del calcolatore, ovviamente questo approccio ha l'ovvia necessità di aumentare il numero di calcoli necessari a risolvere il problema. Come vedremo però il numero di operazioni non è enormemente maggiore rispetto al metodo del simplesso presentato nell'introduzione.

Inizializzazione Supponiamo di avere individuato una matrice di base, e indichiamo con B^{-1} la sua inversa. Calcoliamo $\vec{w} = \vec{c}_b^T B^{-1}$, $\vec{x}_b = B^{-1}b = \vec{b}$ e costruiamo la seguente tabella:

Passo principale Per ogni variabili si calcola esplicitamente le differenze $z_j - c_j = \vec{w}A_j - c_j$. Sia $z_k - c_k$ la maggiore differenza. Se $z_k - c_k \leq 0$, allora la soluzione di base corrente è l'ottimale. Altrimenti si calcola $\vec{y}_k = B^{-1}A_k$. Se $\vec{y}_k \leq 0$, allora ci si ferma, abbiamo trovato che la soluzione ottimale è illimitata. Altrimenti si inserisce la colonna x_k a sinistra del tableau nel modo seguente: Dalla riga introdotto si calcola l'indice r per cui:

$$\frac{x_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{x_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\},$$

infine si esegue l'operazione di pivot su y_{rk} aggiornando il tableau.

4.1.1 Analisi del metodo

Ovviamente il metodo modificato del simplesso è tanto più efficiente in termini di memoria tanto è maggiore il numero dei vincoli rispetto alle variabili. In un sistema i cui coefficienti sono descritti da una matrice $m \times n$, il metodo del simplesso utilizza $(m + 1) \times (n + 1)$ celle di memoria, mentre il metodo del simplesso modificato ne utilizza solo $(m + 1) \times (m + 1)$. Si osserva inoltre che il numero di operazioni richieste dal metodo del simplesso modificato è all'incirca il numero di operazioni richieste dal metodo del simplesso, considerando che in ambito pratico, solitamente, si ha a che fare con matrici

sparse per cui cioè la densità dei dati è molto bassa, quindi molte operazioni possono non essere esplicitamente eseguite.

4.2 Metodo con l'inversa nella forma prodotto

Quest'altra implementazione del metodo del simplesso cerca di ottenerne una versione che possa minimizzare sia il costo computazionale che di memoria; inoltre fornisce un'ottima stabilità numerica riducendo gli errori di round-off.

L'implementazione del metodo del simplesso si distingue, in questo caso, dalla sola trattazione della matrice inversa; invece di calcolarci ad ogni passo la matrice inversa si cerca di ottenerla con delle trasformazioni sui dati precedenti acquisiti. Supponiamo quindi di avere la matrice di base inversa B^{-1} , e di voler eseguire l'operazione di pivoting in y_{rk} . Consideriamo la matrice:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -A_{1k}/A_{rk} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -A_{2k}/A_{rk} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -A_{k-1,k}/A_{rk} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1/A_{rk} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -A_{k+1,k}/A_{rk} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -A_{m-1,k}/A_{rk} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -A_{mk}/A_{rk} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La nuova matrice di base inversa viene individuata come $\tilde{B}^{-1} = TB^{-1}$, mentre le colonne relative alle variabili fuori base sono aggiornate con la seguente formula:

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{N} = T(A_1, A_2, \dots, A_{h-1}, e_k, A_{h+1}, \dots, A_{n-m}).$$

4.3 Lemma di Farkas

Il *lemma di Farkas* costituisce le fondamenta per definire le condizioni di convergenza KKT, come vedremo tale lemma avrà poi delle influenze anche nello studio della problema duale.

lemma di
Farkas

Teorema 4.1 (Lemma di Farkas). *Uno ed uno soltanto dei seguenti problemi ha una soluzione:*

$$A\vec{x} \geq \vec{0} \quad \vec{c}^T \vec{x} < 0; \quad (4.2)$$

$$\vec{w}^T A = \vec{c}^T \quad \vec{w} \geq 0. \quad (4.3)$$

Dove A è una data matrice di coefficienti di dimensione $m \times n$, c è un vettore di dimensione n

Dimostrazione. Equivalente alla tesi del teorema sono gli asserti: se esiste una \vec{x} tale che $A\vec{x} \geq \vec{0}$ e $\vec{c}^T \vec{x} < 0$, allora non esiste alcun vettore \vec{w} , tale che $\vec{w} \geq 0$ e $\vec{w}A = \vec{c}$; viceversa, se non esiste alcuna \vec{x} tale che $A\vec{x} \geq 0$, e $\vec{c}^T \vec{x} < 0$, allora esiste $\vec{w} \geq 0$ per cui $\vec{w}A = \vec{c}$.

Supponiamo che (4.2) abbia una soluzione \vec{x} . Se (4.3) avesse anche lei una soluzione \vec{w} , allora $\vec{c}^T \vec{x} = \vec{w}^T A\vec{x} \geq 0$, siccome $v w \geq 0$ e $A\vec{x} \geq 0$. Ciò contraddice l'ipotesi $\vec{c}^T \vec{x} < 0$, quindi (4.3) non può avere soluzione.

Supponiamo quindi che (4.2) non abbia soluzione. Consideriamo quindi il problema $P : \text{Minimize}\{\vec{c}^T \vec{x} : A\vec{x} \geq 0\}$. Oggettivamente si può osservare che la soluzione nulla è una soluzione ammissibile di P . Poniamo P in forma standard denotando $\vec{x} = \vec{x}' - \vec{x}''$ così da vincolare in segno $\vec{x}, \vec{x} \geq 0$. Indicando con \vec{s} le eventuali variabili di surplus, otteniamo il problema P' :

$$P' : \text{Minimize}\{\vec{c}^T \vec{x}' - \vec{c}^T \vec{x}'' : A\vec{x}' - A\vec{x}'' - \vec{s} = 0, \vec{x}', \vec{x}'', \vec{s} \geq 0\}.$$

Osservando che ponendo $\vec{x}' = \vec{x}'' = \vec{s} = \vec{0}$, è una soluzione ottimale del problema P' . Applicando il metodo del simplesso, ed utilizzando la variabili di \vec{s} come variabili della matrice di base iniziale, si perviene ad una soluzione ottimale del problema P' . Indichiamo con B^{-1} l'inversa della matrice di base della soluzione ottimale, ponendo $\vec{w} = \vec{c}_b B^{-1}$, abbiamo $z_j - c_j = \vec{w}A_j - c_j \leq 0$, considerando la forma vettoriale per descrivere la disequazione per tutte le variabili: $\vec{w}A - \vec{c} \leq 0 \Rightarrow -\vec{w}A + \vec{c} \leq 0$ e $-\vec{w} \leq 0$. Pertanto abbiamo costruttivamente ottenuto $\vec{w} \geq 0$, per cui $\vec{w}A = \vec{c}$. \square

4.4 Condizioni di ottimalità di Karush-Kuhn-Tucker

Le *condizione di ottimalità KKT*, costituiscono le basi per lo studio di problemi di programmazione non lineare; tali condizioni sono utili anche in programmazione lineare poiché costituiscono delle condizioni di necessità e sufficienza per soluzioni ottimali.

Per introdurre le condizioni KKT, consideriamo il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ & A\vec{x} \geq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

sia \vec{x} una soluzione ammissibile del problema. Denotiamo con $G\vec{x} \geq \vec{g}$ il sistema di vincoli soddisfatti da \vec{x} , ovviamente G è una sott'insieme dei vincoli espressi da A . Dallo studio sugli insiemi convessi sappiamo che esiste una soluzione ottimale migliore di \vec{x} se esiste una direzione ammissibile \vec{d} di \vec{x} . Matematicamente, se non esiste alcuna direzione \vec{d} tale che $\vec{c}^T \vec{d} < 0$ e $G\vec{d} \geq \vec{0}$. Viceversa, se esiste \vec{d} tale che $\vec{c}^T \vec{d} < 0$ e $G\vec{d} \geq \vec{0}$, allora posto $\vec{x} = \vec{x} + \lambda \vec{d}$ è una nuova soluzione che diminuisce il valore assunto dalla funzione obiettivo ed al contempo è una soluzione ammissibile:

$$G\vec{x} = G(\vec{x} + \lambda \vec{d}) = \vec{g} + \lambda \underbrace{G\vec{d}}_{\geq 0} \geq \vec{g}.$$

dove λ non può tendere all'infinito, nell'ipotesi che il problema sia limitato, e quindi deve esserci un valore di λ tale da far rimanere la soluzione ammissibile.

Siccome il sistema $\vec{c}^T \vec{d} < 0$ e $G\vec{d} \geq 0$ non può avere soluzione, utilizzando il *lemma di Farkas*, sappiamo che esiste una soluzione del sistema $u \geq 0$ per cui $\vec{u}G = \vec{c}$. Per mettere in relazione il risultato ottenuto applicando il lemma di Farkas alle condizioni espresse dalla matrice A , consideriamo (a^i indica la i -esima riga di A):

$$\mathbb{I} = \{i : a^i \vec{x} = b_i\},$$

cioè \mathbb{I} rappresenta gli indici dei vincoli soddisfatti da \vec{x} .

$$\mathbb{J} = \{j : x_j = 0\},$$

\mathbb{J} rappresenta gli indici dei vincoli *non* soddisfatti da \vec{x} , quindi le variabili fuori base. Ponendo $u_i = w_i$ se $i \in \mathbb{I}$ e $u_j = v_j$ se $j \in \mathbb{J}$, allora possiamo riscrivere le condizioni $\vec{u}G = \vec{c}$, $\vec{u} \geq 0$ come:

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} w_i a^i + \sum_{j \in \mathbb{J}} v_j e_j = \vec{c} \quad (4.5)$$

$$w_i \geq 0 : i \in \mathbb{I}, \quad v_j \geq 0, j \in \mathbb{J} \quad (4.6)$$

le precedenti equazioni, con la richiesta che \vec{x} sia ammissibile, costituiscono le *condizioni di ottimalità KKT*. Presa una qualsiasi altra soluzione ammissibile \vec{x} , consideriamo $\vec{c}^T \vec{x} - \vec{c}^T \vec{x}$ utilizzando le condizioni KKT; per costruzione abbiamo che $a^i \vec{x} = b_i$ e $e_j^T \vec{x} = 0$:

$$\vec{c}^T \vec{x} - \vec{c}^T \vec{x} = \sum_{i \in \mathbb{I}} w_i (a^i \vec{x} - b_i) + \sum_{j \in \mathbb{J}} v_j e_j^T \vec{x} \geq 0,$$

poiché per i vincoli del problema (4.4), $a^i \vec{x} \geq b_i$, con $i \in \mathbb{I}$ (poiché $A\vec{x} \geq \vec{\mathbf{b}}$) e $e_j^T \vec{x} \geq 0$ per $j \in \mathbb{J}$ poiché si richiede la non negatività delle soluzioni \vec{x} . Ma allora \vec{x} è una soluzione ottimale.

Per quantificare \vec{w} e \vec{v} , e per determinarne l'esistenza, riscriviamo le condizioni (4.5) in termini matriciali: $\vec{w}A + \vec{v} = \vec{\mathbf{c}}$. Quindi richiedere le *condizioni KKT* è equivalente a richiedere le soluzioni $(\vec{x}, \vec{w}, \vec{v})$, dei seguenti sistemi:

$$A\vec{x} \geq \vec{\mathbf{b}}, \quad \vec{x} \geq 0 \quad (4.7)$$

$$\vec{w}A + \vec{v} = \vec{\mathbf{c}}, \quad \vec{w} \geq 0, \vec{v} \geq 0 \quad (4.8)$$

$$\vec{w}(A\vec{x} - \vec{\mathbf{b}}) = 0, \quad \vec{x} = 0 \quad (4.9)$$

Il sistema (4.7) è detto *problema primale*, e corrisponde alle richieste del problema iniziale; la seconda condizione (4.8) è detto *problema duale* poiché le soluzioni di questo problema sono strettamente legate al *problema primale*, permettendo di analizzare in dettaglio il comportamento del problema iniziale al variare dei parametri.

Le variabili del problema duale \vec{w}, \vec{v} sono chiamate *moltiplicatori lagrangiani*.

Infine il problema (4.9) è detto *problema complementare*.

problema
primale
problema
duale

moltiplicatori
lagrangiani
problema
complemen-
tare

5

Dualità

Ad ogni problema primale può essere associato un problema duale; sia dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ & A\vec{x} \geq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

il problema duale ad esso associato è:

$$\begin{aligned} \max \quad & \vec{w}^T \vec{b} \\ & \vec{w}A \leq \vec{c} \\ & \vec{w} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Bibliografia

[She77] M. Bazaraa & J.J. Jarvis & H.D. Sherali. *Linear Programming and Network flows*. Joen Wiley & Sons, 1977.

[va] va. <http://www.wikipedia.org>.

[va01] va. Dispense di ricerca operativa università di roma 2. *internet*, 2001.